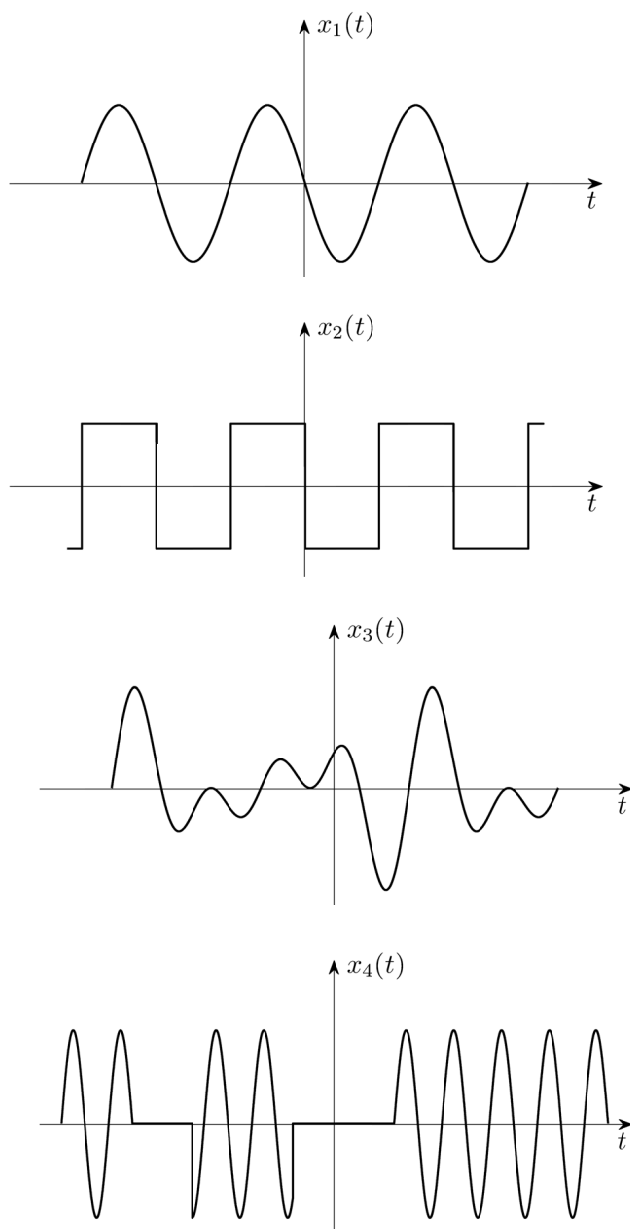


# KONTINUALNI SIGNALI

*Kontinualni signal* je jednoznačno definisan za svaku vrijednost nezavisne varijable, osim u konačnom broju tačaka. Ukoliko amplituda kontinualnog signala može da poprimi proizvoljnu vrijednost iz dozvoljenog opsega, kažemo da se radi o *analognom signalu*. Za signale čije vrijednosti amplitude pripadaju konačnom skupu kažemo da su *kvantovani po amplitudi* ili samo kvantovani, ukoliko podrazumijevamo da radimo sa signalima kontinualnim u vremenu.

Podrazumijevajući da radimo sa jednodimenzionalnim signalima kod kojih je nezavisna varijabla vrijeme, kontinualni signal označavamo sa  $x(t)$ , gdje je  $t$  simbol za nezavisnu varijablu. Primjeri analitičkih izraza za kontinualne signale su:  $x(t) = e^{-t}$ ,  $x(t) = \cos t$  i  $x(t) = 1, |t| \leq T_0 \wedge x(t) = 0, |t| > T_0$ . Na Slici 2.1 grafički su prikazani primjeri kontinualnih signala.



Slika 2.1 Primjeri kontinualnih signala.

## 2.1 Klasifikacija kontinualnih signala

Klasifikacija signala je zasnovana na njihovim osobinama koje vrlo često oslikavaju osobine fizičkih pojava koje opisuju. Tako govorimo o realnim i kompleksnim, periodičnim i neperiodičnim, determinističkim i stohastičkim, te signalima energije i signalima snage. Budući da su u osnovi funkcije, klasifikacija signala je slična klasifikaciji funkcija.

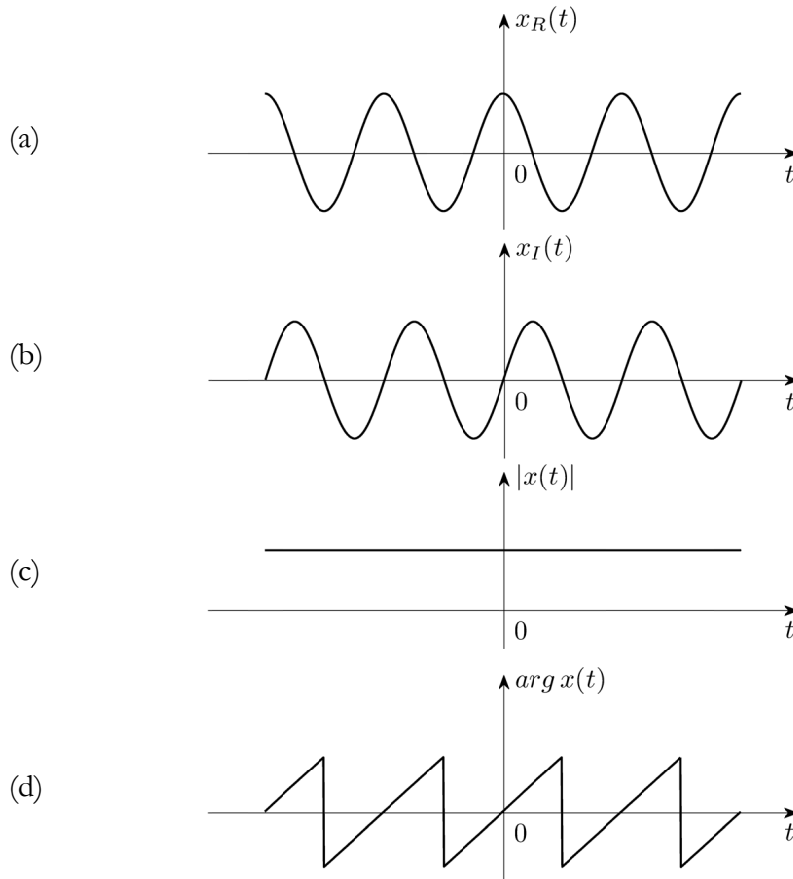
### 2.1.1 Jednodimenzionalni i višedimenzionalni signali

Signali mogu biti funkcije jedne ili više nezavisnih varijabli, te govorimo o *jednodimenzionalnim* ili *višedimenzionalnim* signalima. Prilikom posmatranja jednodimenzionalnih signala najčešće podrazumijevamo da je nezavisna varijabla vrijeme, kod dvodimenzionalnih prostorne varijable, a kod trodimenzionalnih tri prostorne ili dvije prostorne i jedna vremenska varijabla.

### 2.1.2 Realni i kompleksni signali

Signal može biti realna ili kompleksna matematička funkcija realne ili kompleksne nezavisne varijable. Shodno tome govorimo o *realnim signalima*, odnosno o *kompleksnim signalima*. Realni signali svakoj vrijednosti nezavisne varijable pridružuju realan broj, dok su vrijednosti kompleksnih signala za svaku vrijednost nezavisne promjenljive kompleksni brojevi, predstavljeni svojim realnim i imaginarnim dijelom, ili modulom i argumentom. Kompleksni signali se uglavnom vještački formiraju uzimajući za realni i imaginarni dio, ili za modul i argument, dva realna signala. Na primjer, modul kompleksnog signala može da predstavlja intenzitet, a argument smjer vjetra, električnog ili magnetnog polja u toku vremena u nekoj tački prostora. Potrebno je pomenuti da se, prilikom nekih analiza, realni signali realnih varijabli preslikavaju u kompleksne funkcije realnih ili kompleksnih varijabli.

Grafička predstava kompleksnih signala zasniva se na zasebnom prikazu njihovog realnog i imaginarnog dijela, ili zasebnom prikazu modula i argumenta, kao na Slici 2.2.

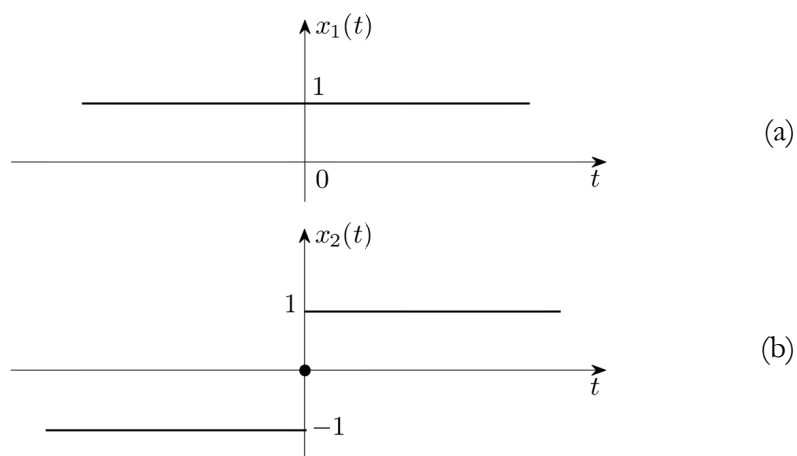


Slika 2.2 (a) Realni dio; (b) imaginarni dio; (c) modul i (d) argument kompleksnog signala.

### 2.1.3 Parni i neparni signali

*Parni signali* su osno simetrični u odnosu na ordinatu, dok su *neparni signali* centralno simetrični u odnosu na koordinatni početak. Za signal kažemo da je paran ako vrijedi:

$$x(-t) = x(t), \quad (2.1)$$



Slika 2.3 (a) Parni i (b) neparni signal.

dok je signal neparan ako je:

$$x(-t) = -x(t). \quad (2.2)$$

Primjeri parnih i neparnih signala dati su na Slici 2.3. Svaki signal je moguće razložiti na njegov parni  $\mathcal{P}\{x(t)\}$  i neparni  $\mathcal{N}\{x(t)\}$  dio:

$$x(t) = \mathcal{P}\{x(t)\} + \mathcal{N}\{x(t)\}. \quad (2.3)$$

Budući da je:

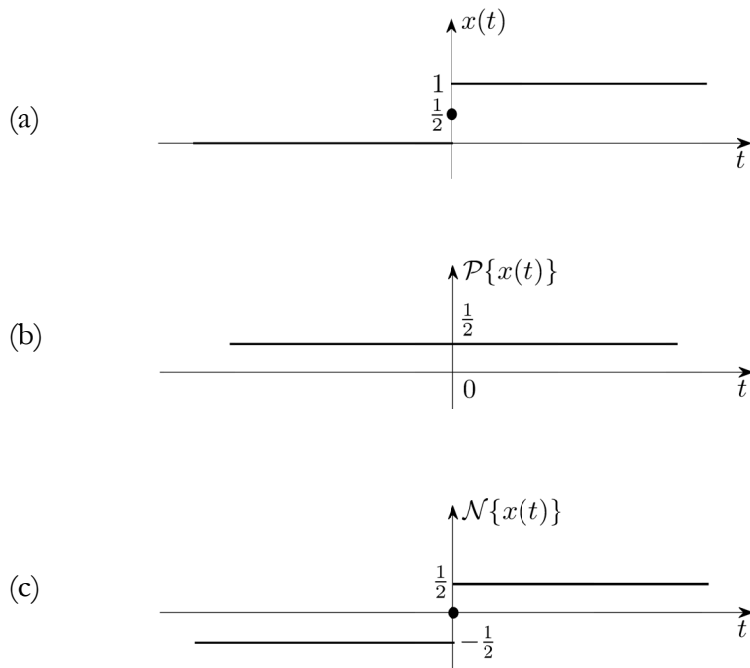
$$x(-t) = \mathcal{P}\{x(-t)\} + \mathcal{N}\{x(-t)\} = \mathcal{P}\{x(t)\} - \mathcal{N}\{x(t)\}, \quad (2.4)$$

parni i neparni dio signala se određuju na sljedeći način:

$$\mathcal{P}\{x(t)\} = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)], \quad (2.5)$$

$$\mathcal{N}\{x(t)\} = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)]. \quad (2.6)$$

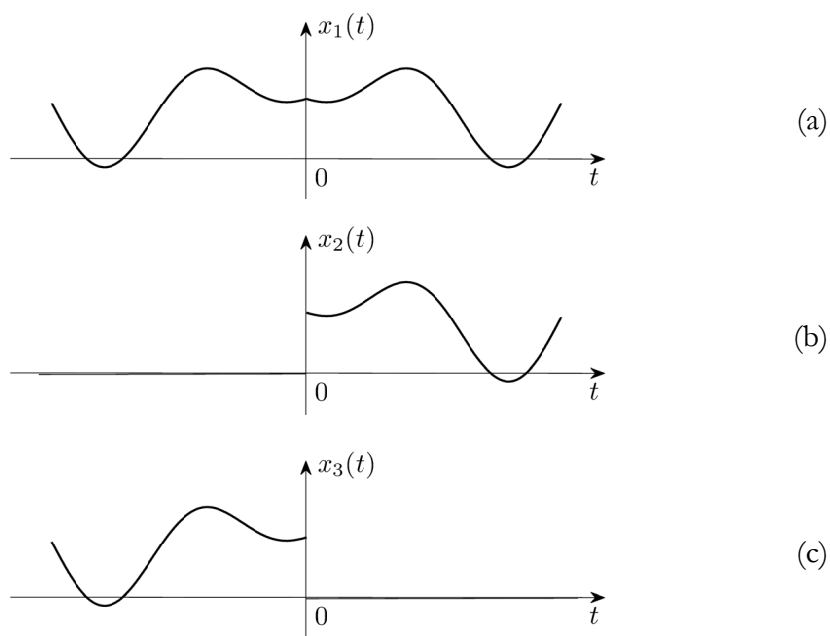
Primjer razlaganja signala na parni i neparni dio dat je na Slici 2.4.



Slika 2.4 Dekompozicija signala na parni i neparni dio: (a) originalni signal; (b) parni dio signala i (c) neparni dio signala.

### 2.1.4 Kauzalni i nekauzalni signali

Ako sa  $t=0$  označimo početni trenutak posmatranja neke pojave sa kojom je vezan dati signal, onda kažemo da je signal *kauzalan* ukoliko je  $x(t)=0, \forall t < 0$ . Ako  $x(t) \neq 0$  za neko  $t < 0$  kažemo da je signal *nekauzalan*. Signal je *antikauzalan* ako je  $x(t)=0, \forall t > 0$ . Na Slici 2.5 su prikazani primjeri nekauzalnog, kauzalnog i antikauzalnog signala.



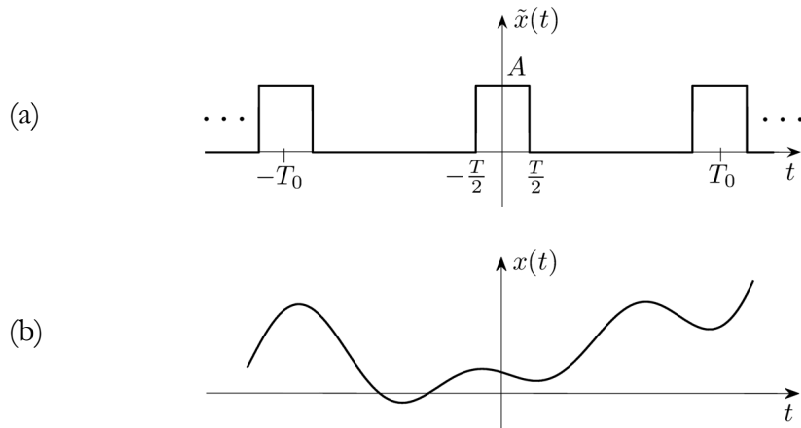
Slika 2.5 (a) Nekauzalni signal; (b) kauzalni signal i (c) antikauzalni signal.

### 2.1.5 Periodični i neperiodični signali

Ako postoji pozitivna vrijednost za  $T$  takva da vrijedi:

$$x(t) = x(t+T), \forall t, \quad (2.7)$$

kažemo da je signal *periodičan* sa periodom  $T$ , u suprotnom je *neperiodičan*. Svaki signal periodičan sa periodom  $T$  je periodičan i sa periodom  $mT$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ . *Osnovni period*  $T_0$  je najmanja pozitivna vrijednost  $T$  za koju je uslov periodičnosti ispunjen. Ova definicija osnovnog perioda vrijedi za sve signale izuzev konstante. U slučaju konstante osnovni period je nedefinisan, jer je konstantni signal periodičan za bilo koji izbor  $T$ , tako da ne postoji najmanja pozitivna vrijednost za  $T$ . Na Slici 2.6 dati su primjeri periodičnog i neperiodičnog signala.



Slika 2.6 (a) Periodičan signal i (b) neperiodičan signal.

### 2.1.6 Signali energije i signali snage

Energija signala na zatvorenom intervalu vremena  $T = [t_1, t_2]$  je definisana sa:

$$W_T = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt, \quad (2.8)$$

dok je ukupna energija signala:

$$W_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt. \quad (2.9)$$

Signale sa konačnom ukupnom energijom nazivamo *energetskim signalima*. Kod takvih signala je srednja snaga, koja se definiše sa:

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt, \quad (2.10)$$

jednaka nuli, jer je  $\lim_{T \rightarrow \infty} W_T$  konačno, odakle sledi da je:



$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{W_T}{T} \quad (2.11)$$

jednako nuli.

Kod signala čija je ukupna energija  $W_x = \lim_{T \rightarrow \infty} W_T$  beskonačno velika srednja snaga može biti konačna ili beskonačna. Signale sa beskonačno velikom energijom i konačnom srednjom snagom (različitom od nule) nazivamo *signalima snage*. Periodični signali imaju beskonačnu energiju, ali im je srednja snaga najčešće konačna, te ih ubrajamo u signale snage.

### 2.1.7 Deterministički i stohastički signali

*Deterministički signal* je matematička funkcija koja je jednoznačno definisana za svaku vrijednost nezavisne varijable.

*Stohastički signal* ili slučajni proces ima vrijednosti koje u svakom vremenskom trenutku predstavljaju slučajnu varijablu. Slučajni proces je funkcija dva nezavisna argumenta. Prvi argument, vrijeme, pripada skupu realnih brojeva. Drugi argument je slučajna varijabla koja predstavlja ishod hipotetičkog fizičkog eksperimenta. Slučajni proces predstavlja familiju (ansambl) realizacija (matematičkih funkcija vremena) za različite ishode eksperimenta. Za svaki ishod eksperimenta dobija se jedna realizacija slučajnog procesa. Analiza i obrada stohastičkih signala se zasniva na teoriji vjerovatnoće i slučajnih varijabli i izlazi iz okvira ove knjige.

## 2.2 Elementarni signali

Analiza i obrada signala se pojednostavljuje uvođenjem elementarnih signala i svodenjem složenih problema analize i obrade signala na jednostavnije slučajeve analize i obrade elementarnih signala. U ovom dijelu uvešćemo nekoliko posebno važnih kontinualnih signala, koji ne samo da se često pojavljuju u prirodi, već ih često koristimo pri konstrukciji složenijih signala. Među njima najvažnija mjesta zauzimaju jedinični odskočni signal, signal znaka, signal nagiba, pravougaoni i trougaoni impuls, jedinični impuls beskonačno velike amplitude, te kompleksni eksponencijalni, sinusni i sinc signali.

### 2.2.1 Jedinični odskočni signal

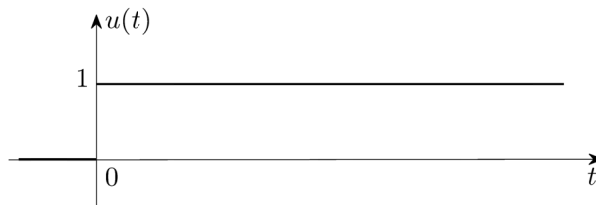
*Jedinični odskočni signal* se definiše sa:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} . \quad (2.12)$$

Vrijednost u nuli nije definisana. Ovaj signal se često naziva i *Hevisajdova funkcija*, u čast naučnika Hevisajda (Oliver Heaviside, 1850-1925), iako se Hevisajdova funkcija originalno definiše sa:

$$u_h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2}, & t = 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} . \quad (2.13)$$

Jedinični odskočni signal je prikazan na Slici 2.7. Primijetimo da oba ova signala imaju diskontinuitet u  $t=0$ , tj.  $u(0_+) \neq u(0_-)$  i  $u_h(0_+) \neq u_h(0_-)$ . Jedinični odskočni signal igra važnu ulogu u ispitivanju osobina sistema.



Slika 2.7 Jedinični odskočni signal.

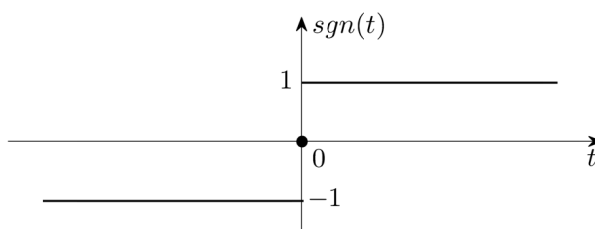
## 2.2.2 Signal znaka

Signal *znaka* se definiše sa:

$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} -1, & t < 0 \\ 0, & t = 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

Ovaj signal je prikazan na Slici 2.8. Između signala znaka i Hevisajdove funkcije postoji sljedeća veza:

$$\operatorname{sgn}(t) = 2u_h(t) - 1. \quad (2.15)$$



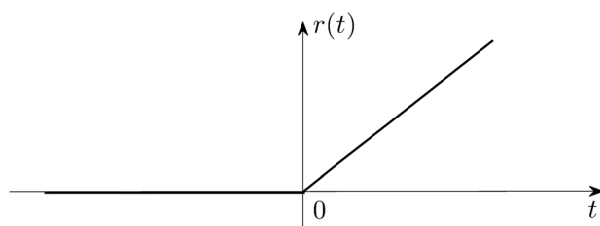
Slika 2.8 Signal znaka.

## 2.2.3 Signal nagiba

Signal *nagiba* je definisan sa:

$$r(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & t \geq 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

Signal nagiba je prikazan na Slici 2.9.



Slika 2.9 Signal nagiba.

Sa jediničnim odskočnim signalom je povezan na sljedeći način:

$$r(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau, \quad (2.17)$$

$$u(t) = \frac{dr(t)}{dt}, \quad t \neq 0. \quad (2.18)$$

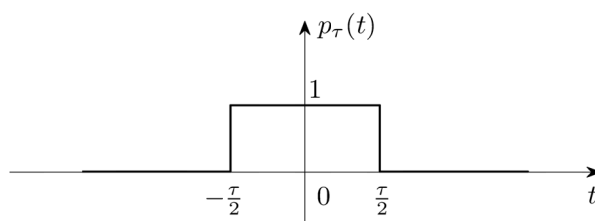
#### 2.2.4 Pravougaoni impuls

*Pravougaoni impuls*, dat sa:

$$p_{\tau}(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0, & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}, \quad (2.19)$$

prikazan je na Slici 2.10. Vrijednosti pravougaonog impulsa za  $t = \pm \frac{\tau}{2}$  nisu definisane.

Vrijednosti pravougaonog impulsa se iz jediničnog odskočnog signala mogu dobiti na sljedeći način:



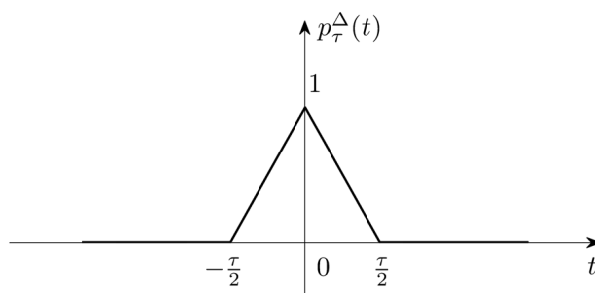
Slika 2.10 Pravougaoni impuls.

$$p_{\tau}(t) = u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right), \quad \forall t \neq \pm \frac{\tau}{2}. \quad (2.20)$$

### 2.2.5 Trougaoni impuls

*Trougaoni impuls*, prikazan na Slici 2.11, se analitički zapisuje sa:

$$p_{\tau}^{\Delta}(t) = \begin{cases} 1 + \frac{2t}{\tau}, & -\frac{\tau}{2} \leq t \leq 0 \\ 1 - \frac{2t}{\tau}, & 0 \leq t \leq \frac{\tau}{2} \\ 0, & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}. \quad (2.21)$$



Slika 2.11 Trougaoni impuls.

Trougaoni impuls se može izraziti preko signala nagiba sa:

$$p_{\tau}^{\Delta}(t) = \frac{2}{\tau} \left[ r \left( t + \frac{\tau}{2} \right) - 2r(t) + r \left( t - \frac{\tau}{2} \right) \right]. \quad (2.22)$$

### 2.2.6 Dirakov impuls

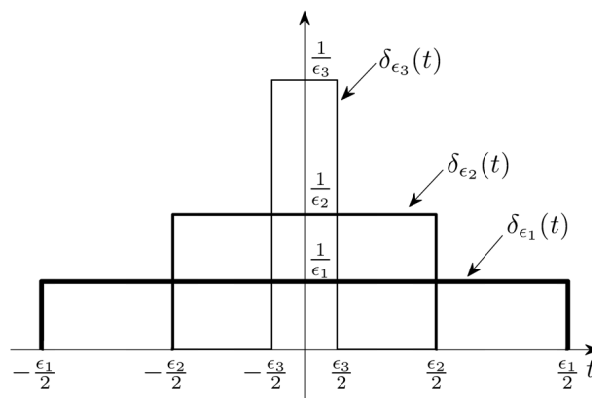
Jedinična impulsna funkcija, nazvana *Dirakova funkcija* ili *Dirakov impuls* u čast fizičara Diraka (Paul Dirac, 1902-1984), se može posmatrati kao granični slučaj pravougaonog impulsa  $p_{\epsilon}(t)$  jedinične površine (*jediničnog pravougaonog impulsa*):

$$\delta_{\epsilon}(t) = \frac{1}{\epsilon} p_{\epsilon}(t), \quad (2.23)$$

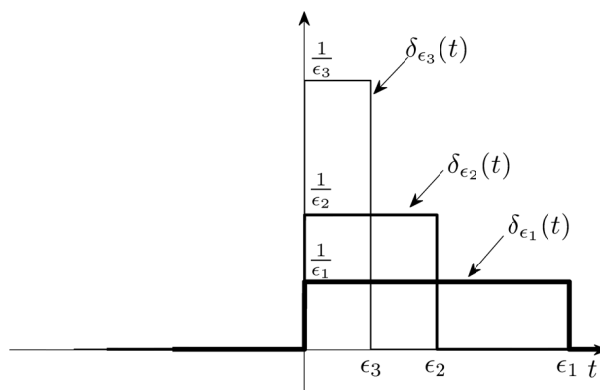
kada njegova širina teži ka nuli, a amplituda beskonačno raste. Pri tome površina impulsa ostaje jednaka jedinici, pogledati Sliku 2.12. Dakle, Dirakov impuls se može zapisati kao:

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_{\epsilon}(t). \quad (2.24)$$

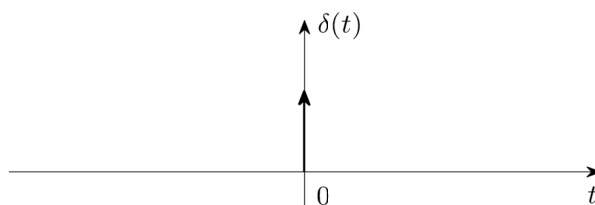
Ovako uveden Dirakov impuls je nekauzalan. Kauzalna verzija Dirakovog impulsa se dobije kao granični slučaj kauzalnog impulsa, kao na Slici 2.13.



Slika 2.12 Jedinični pravougaoni impulsi.



Slika 2.13 Kauzalni jedinični pravougaoni impulsi.



Slika 2.14 Dirakov impuls.

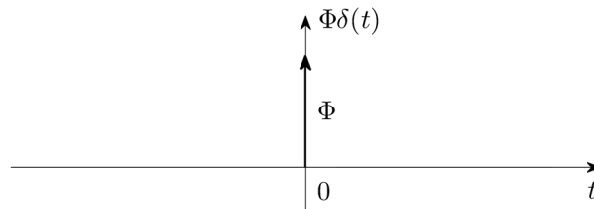
Dirakov impuls, prikazan na Slici 2.14, se može definisati kao funkcija koja u nuli ima beskonačno veliku vrijednost, dok je u svakom drugom trenutku jednaka nuli:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \quad (2.25)$$

sa osobinom da je:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{0_-}^{0_+} \delta(t) dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta_{\epsilon}(t) dt = 1. \quad (2.26)$$

Vrijednost integrala Dirakovog impulsa sa proizvoljnim granicama je jednaka jedinici ako oblast integraljenja obuhvata Dirakov impuls. *Jačina udara* se definiše kao površina impulsa čije trajanje teži ka nuli a amplituda beskonačno velikoj vrijednosti.

Slika 2.15 Dirakov impuls jačine udara  $\Phi$ .

Ako signal ima beskonačno veliku vrijednost u nuli i vrijednost nula u svakom drugom trenutku, a pri tome vrijednost integrala (2.26) nije jednaka jedinici već nekoj vrijednosti  $\Phi$ , radi se o Dirakovom impulsu jačine udara  $\Phi$ . Iako (2.25) i (2.26) vrijede i za kauzalan i za nekauzalan Dirakov impuls, mi ćemo u nastavku izlaganja podrazumijevati nekauzalan Dirakov impuls.

Dirakov impuls se može posmatrati i kao granični slučaj drugih funkcija (Gausove funkcije, trougaonog impulsa) kada njihova širina teži ka nuli, a amplituda beskonačno raste, pri čemu se zadržava jedinična vrijednost integrala.

Simbolička predstava Dirakovog impulsa jačine udara  $\Phi$  prikazana je na Slici 2.15. Različite veličine strelice se mogu koristiti da označe različite jačine udara.

Za bilo koju matematičku funkciju  $x(t)$  koja je neprekidna u  $t = t_0$  vrijedi da je:

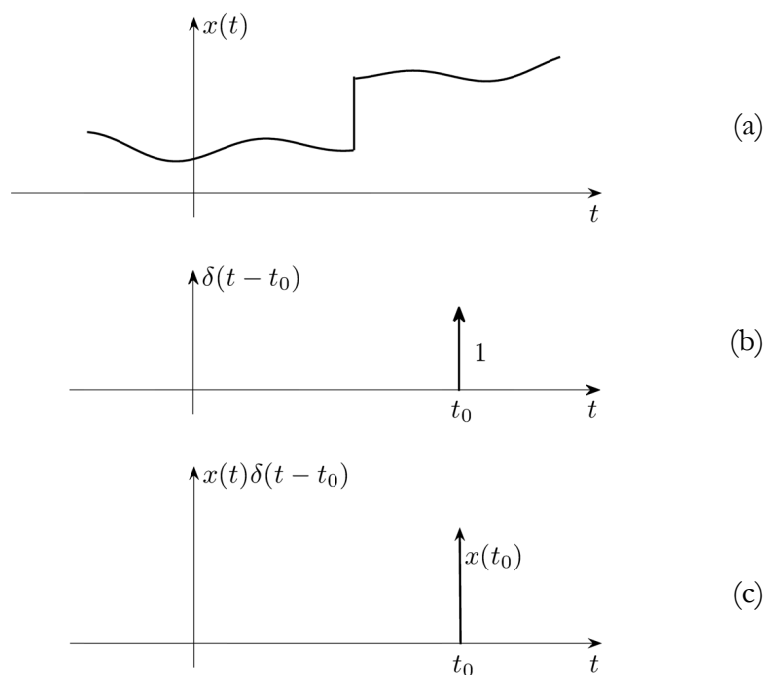
$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0). \quad (2.27)$$

Kažemo da Dirakov impuls ima *svojstvo odabiranja*, jer za jačinu udara rezultujućeg Dirakovog impulsa bira vrijednost funkcije u tački djelovanja. Ovo svojstvo Dirakovog impulsa ilustrovano je na Slici 2.16.

Svojstvo odabiranja Dirakovog impulsa omogućava da se na jednostavan način izračuna integral proizvoda Dirakovog impulsa i proizvoljne funkcije koja je neprekidna u tački djelovanja Dirakovog impulsa:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t_0)\delta(t-t_0)dt = x(t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)dt = x(t_0). \quad (2.28)$$





Slika 2.16 Svojstvo odabiranja Dirakovog impulsa: (a) proizvoljna matematička funkcija neprekidna u tački djelovanja Dirakovog impulsa; (b) pomjeren Dirakov impuls i (c) proizvod date funkcije i pomjerenog Dirakovog impulsa.

Posmatrajmo nekauzalni Dirakov impuls koji je paran signal:

$$\delta(t) = \delta(-t). \quad (2.29)$$

Ako je neka funkcija  $x(t)$  neprekidna u nuli, tada je  $x(0_-) = x(0_+) = x(0)$ , pa koristeći (2.28) dobijamo da je:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0) \int_{0_-}^0 \delta(t)dt + x(0) \int_0^{0_+} \delta(t)dt = x(0). \quad (2.30)$$

Zbog parnosti nekauzalnog Dirakovog impulsa vrijedi da je:

$$\int_{0_-}^0 \delta(t) dt = \int_0^{0_+} \delta(t) dt = \frac{1}{2}. \quad (2.31)$$

Prethodno razmatranje nam omogućava da izračunamo vrijednosti sljedećih intergala:

$$\int_{-\infty}^0 x(t) \delta(t) dt = x(0) \int_{0_-}^0 \delta(t) dt = \frac{1}{2} x(0), \quad (2.32)$$

$$\int_0^{\infty} x(t) \delta(t) dt = x(0) \int_0^{0_+} \delta(t) dt = \frac{1}{2} x(0). \quad (2.33)$$

Slično vrijedi za integrale proizvoda pomjerenog Dirakovog impulsa i funkcije  $x(t)$  koja je neprekidna u  $t = t_0$ :

$$\int_{-\infty}^{t_0} x(t) \delta(t - t_0) dt = \frac{1}{2} x(t_0), \quad (2.34)$$

$$\int_{t_0}^{\infty} x(t) \delta(t - t_0) dt = \frac{1}{2} x(t_0). \quad (2.35)$$

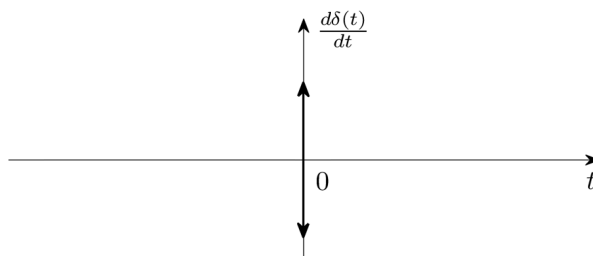
Već smo spomenuli da se Dirakov impuls može posmatrati i kao granični slučaj trougaonog impulsa:

$$p_{\varepsilon}^{\Delta}(t) = \begin{cases} 1 + \frac{t}{\varepsilon}, & -\varepsilon \leq t \leq 0 \\ 1 - \frac{t}{\varepsilon}, & 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 0, & |t| > \varepsilon \end{cases}, \quad (2.36)$$

tako da je:

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} p_{2\varepsilon}^{\Delta}(t). \quad (2.37)$$

Ovakvo posmatranje omogućava da se odredi izvod Dirakovog impulsa:



Slika 2.17 Simbolička predstava izvoda Dirakovog impulsa.

$$\frac{d\delta(t)}{dt} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \frac{dp_{2\varepsilon}^{\Delta}(t)}{dt} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \frac{d}{dt} \begin{cases} 1 + \frac{t}{\varepsilon}, & -\varepsilon \leq |t| \leq 0 \\ 1 - \frac{t}{\varepsilon}, & 0 \leq |t| \leq \varepsilon \\ 0, & |t| > \varepsilon \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon^2}, & -\varepsilon \leq |t| \leq 0 \\ -\frac{1}{\varepsilon^2}, & 0 \leq |t| \leq \varepsilon \\ 0, & |t| > \varepsilon \end{cases},$$

$$\frac{d\delta(t)}{dt} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^2} \left[ p_{\varepsilon} \left( t + \frac{\varepsilon}{2} \right) - p_{\varepsilon} \left( t - \frac{\varepsilon}{2} \right) \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[ \delta_{\varepsilon} \left( t + \frac{\varepsilon}{2} \right) - \delta_{\varepsilon} \left( t - \frac{\varepsilon}{2} \right) \right],$$

$$\frac{d\delta(t)}{dt} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[ \delta \left( t + \frac{\varepsilon}{2} \right) - \delta \left( t - \frac{\varepsilon}{2} \right) \right]. \quad (2.38)$$

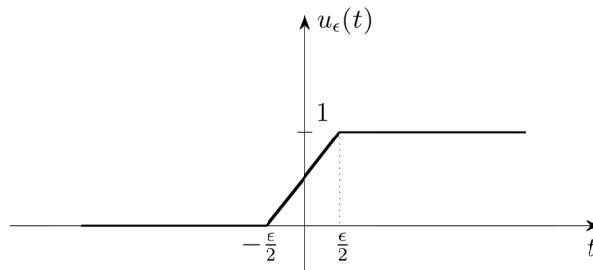
Izvod Dirakovog impulsa je *impulsni dublet*, predstavljen sa dva Dirakova impulsa u nuli sa beskonačno velikim jačinama udara. Izvod Dirakovog impulsa je neparan:

$$\frac{d\delta(t)}{dt} = -\frac{d\delta(-t)}{dt}. \quad (2.39)$$

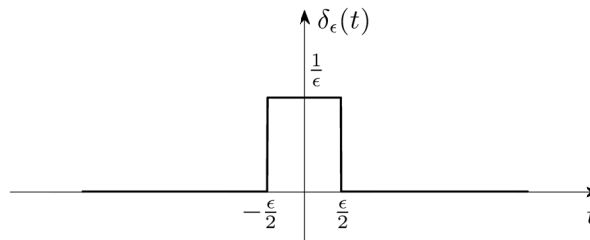
Slično se mogu odrediti izvodi višeg reda. Simbolička predstava izvoda Dirakovog impulsa prikazana je na Slici 2.17.

U analizi signala i sistema veza veoma je važno uspostaviti vezu između Dirakovog impulsa i jediničnog odskočnog signala. Na osnovu:

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_{\varepsilon}(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} p_{\varepsilon}(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[ u \left( t + \frac{\varepsilon}{2} \right) - u \left( t - \frac{\varepsilon}{2} \right) \right], \quad (2.40)$$



Slika 2.18 Kontinualna aproksimacija jediničnog odskočnog signala.



Slika 2.19 Izvod aproksimacije jediničnog odskočnog signala.

zaključujemo da je Dirakov impuls jednak izvodu jediničnog odskočnog signala:

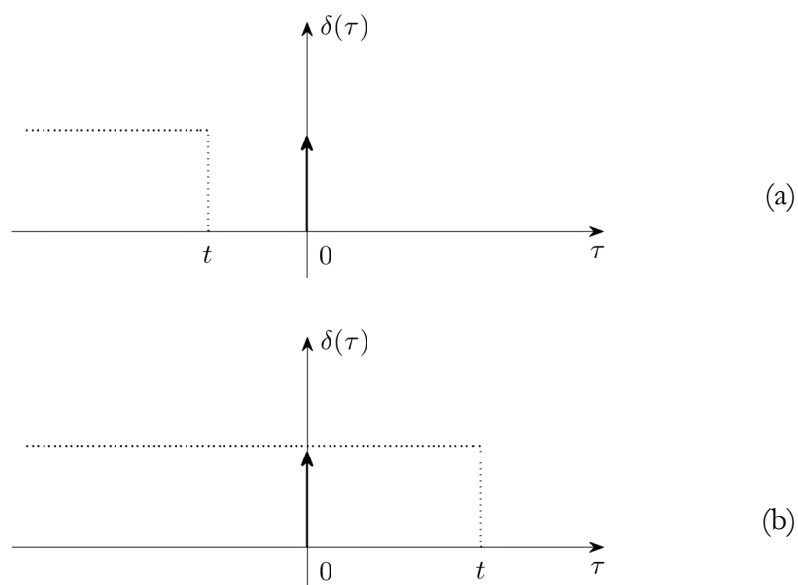
$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}. \quad (2.41)$$

Iako zbog diskontinuiteta u nuli jedinični odskočni signal formalno nije diferencijabilan, ovu vezu možemo interpretirati kao granični slučaj izvoda kontinualne funkcije  $u_\epsilon(t)$ , prikazane na Slici 2.18.

Kao što možemo da vidimo sa Slike 2.19, izvod aproksimacije jediničnog odskočnog signala je jednak ranije definisanom jediničnom pravougaonom impulsu  $\delta_\epsilon(t)$ , te je:

$$\delta_\epsilon(t) = \frac{du_\epsilon(t)}{dt}. \quad (2.42)$$

Površina normalizovanog pravougaonog impulsa  $\delta_\epsilon(t)$  je jednaka jedinici.

Slika 2.20 Klizeći integral Dirakovog impulsa: (a)  $t < 0$  i (b)  $t > 0$ .

Kada  $\varepsilon \rightarrow 0$ , izvod aproksimacije jediničnog odskočnog signala teži Dirakovom impulsu:

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{du_\varepsilon(t)}{dt} = \frac{du(t)}{dt}. \quad (2.43)$$

Znajući da je vrijednost klizećeg integrala (integrala sa promjenljivom gornjom granicom integracije) Dirakove funkcije:

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2}, & t = 0, \\ 1, & t > 0 \end{cases} \quad (2.44)$$

(postupak ilustrovan na Slici 2.20), uspostavljamo vezu između Hevisajdove funkcije i Dirakovog impulsa:

$$u_h(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau. \quad (2.45)$$

### 2.2.7 Kompleksni eksponencijalni i sinusni signali

*Kompleksni eksponencijalni signal* se definiše sa:

$$x(t) = C\alpha^t, \quad (2.46)$$

gdje su  $C$  i  $\alpha$  u opštem slučaju kompleksne konstante. Za  $C, \alpha \in \mathbb{R}$  signal dat sa (2.46) postaje *realni eksponencijalni signal*. Na Slici 2.21 su prikazani osnovni realni eksponencijalni signali. Kod tih signala, sa porastom vremenske varijable  $t$ , za  $\alpha > 1$  signal eksponencijalno raste, za  $0 < \alpha < 1$  signal eksponencijalno opada, dok se za  $\alpha = 0$  i  $\alpha = 1$  radi o konstantnom signalu  $x(t) = C$ . Signali koji eksponencijalno rastu se koriste pri opisivanju nekih prirodnih pojava, kao što su lančane reakcije kod složenih hemijskih procesa ili neograničeni porast populacije bakterijskih kultura. U prirodi se fizičke pojave češće opisuju signalima koji eksponencijalno opadaju. Primjeri signala koji eksponencijalno opadaju su odzivi RC kola i signali koji opisuju radioaktivno raspadanje.

Sa kompleksnim eksponencijalnim signalima usko su povezani *sinusni signali*. Opšti oblik *realnog sinusnog signala* je:

$$x(t) = A \cos(\Omega_0 t + \theta), \quad A \in \mathbb{R}. \quad (2.47)$$

Faza  $\theta$  je izražena u radianima, a ugaona frekvencija  $\Omega_0$  u radianima po sekundi. Ugaona frekvencija  $\Omega_0$ , odnosno učestanost izražena u radianima u sekundi, je sa frekvencijom  $F_0$  izraženom u Hz povezana relacijom:

$$\Omega_0 = 2\pi F_0. \quad (2.48)$$

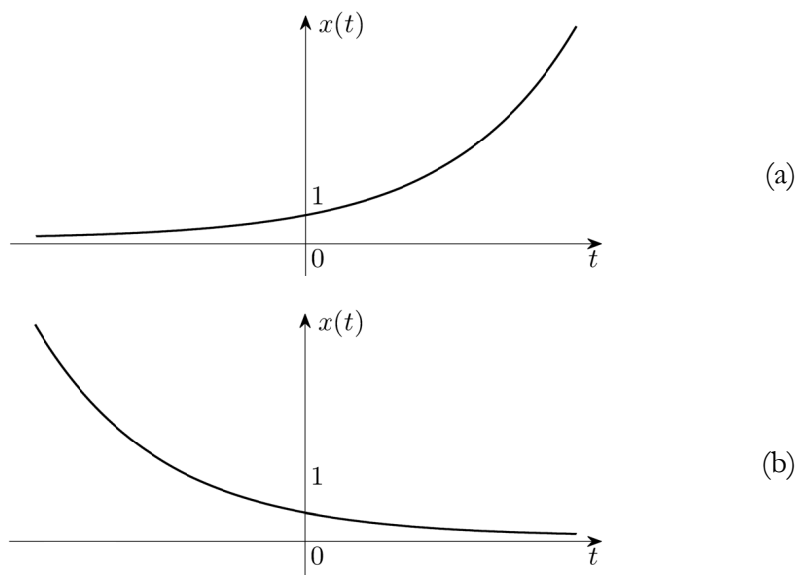
Zapisujući kompleksne brojeve  $C$  i  $\alpha$  u polarnom obliku:  $C = |C|e^{j\theta}$  i  $\alpha = |\alpha|e^{j\Omega_0 t}$ , kompleksni eksponencijalni signal  $x(t) = C\alpha^t$  možemo zapisati sa:

$$x(t) = |C||\alpha|^t \cos(\Omega_0 t + \theta) + j|C||\alpha|^t \sin(\Omega_0 t + \theta). \quad (2.49)$$

Za  $|\alpha| = 1$ , uz oznaku  $|C| = A$ , (2.49) poprima sljedeći oblik:

$$x(t) = Ce^{j\Omega_0 t} = |C|e^{j(\Omega_0 t + \theta)} = A \cos(\Omega_0 t + \theta) + jA \sin(\Omega_0 t + \theta). \quad (2.50)$$

Za realni dio signala (2.50) vrijedi da je:



Slika 2.21 Realni eksponencijalni signali oblika  $x(t) = C\alpha^t$  :  
 (a)  $\alpha > 1$  i (b)  $0 < \alpha < 1$ .

$$\operatorname{Re}\{x(t)\} = A \operatorname{Re}\{e^{j(\Omega_0 t + \theta)}\} = A \cos(\Omega_0 t + \theta). \quad (2.51)$$

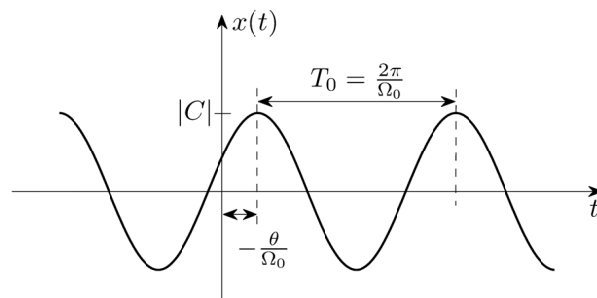
Sinusna i kosinusna matematička funkcija su istog oblika, ali su međusobno fazno pomjerene za  $\frac{\pi}{2}$  :

$$\cos(\Omega_0 t) = \sin\left(\Omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right), \quad (2.52)$$

$$\sin(\Omega_0 t) = \cos\left(\Omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right), \quad (2.53)$$

te je imaginarni dio posmatranog kompleksnog eksponencijalnog signala takođe sinusni signal:

$$\operatorname{Im}\{x(t)\} = |C| \operatorname{Im}\{e^{j(\Omega_0 t + \theta)}\} = A \sin(\Omega_0 t + \theta) = A \cos\left(\Omega_0 t + \theta - \frac{\pi}{2}\right). \quad (2.54)$$

Slika 2.22 Sinusni signal ( $\theta \geq 0$ ).

Zbog toga ćemo kompleksne eksponencijalne signale kod kojih je  $|\alpha|=1$  zvati *kompleksnim sinusnim signalima*. Koristeći Ojlerovu relaciju:

$$e^{j\Omega_0 t} = \cos \Omega_0 t + j \sin \Omega_0 t, \quad (2.55)$$

sinusni signal se može zapisati preko kompleksnog sinusnog signala iste učestanosti i istog faznog stava kao:

$$A \cos(\Omega_0 t + \theta) = \frac{A}{2} \left( e^{j(\Omega_0 t + \theta)} + e^{-j(\Omega_0 t + \theta)} \right). \quad (2.56)$$

Primjer sinusnog signala je prikazan na Slici 2.22. Odziv LC kola ima oblik sinusoidalnog signala, kao i varijacije akustičkog pritiska koje odgovaraju jednom tonu muzike.

Važna osobina sinusnih signala je njihova periodičnost. Uslov periodičnosti je:

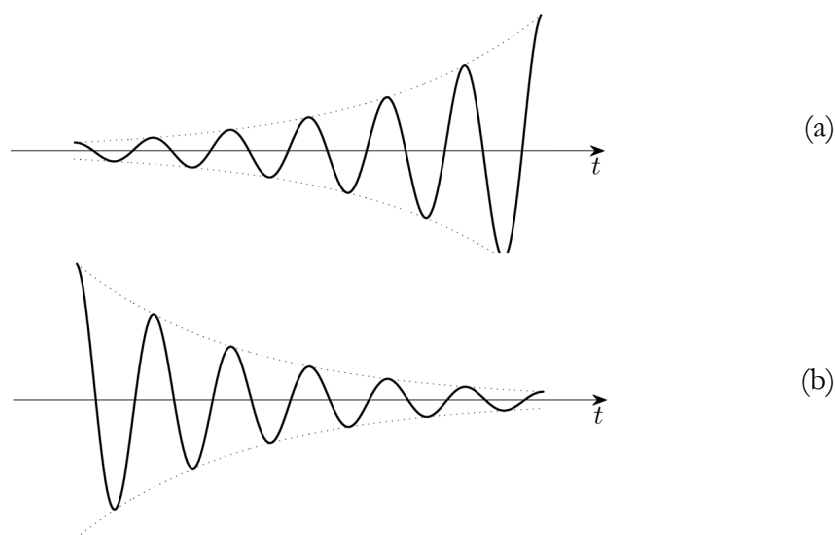
$$e^{j\Omega_0 t} = e^{j\Omega_0(t+T)} = e^{j\Omega_0 t} e^{j\Omega_0 T}, \quad (2.57)$$

$$e^{j\Omega_0 T} = 1. \quad (2.58)$$

Ako je  $\Omega_0 = 0$  radi se o konstantnom signalu  $x(t)=1$  koji je periodičan za svaku vrijednost  $T$ . Ako je  $\Omega_0 \neq 0$  tada je osnovni period  $T_0$  dat sa:

$$T_0 = \frac{2\pi}{|\Omega_0|}. \quad (2.59)$$





Slika 2.23 (a) Rastući pseudoperiodični sinusni signal i (b) opadajući pseudoperiodični sinusni signal.

Na osnovu prethodnih relacija lako zaključujemo da signali  $e^{j\Omega_0 t}$  i  $e^{-j\Omega_0 t}$  imaju isti osnovni period. Kontinualni kompleksni eksponencijalni signali oblika  $e^{j\Omega_0 t}$  su periodični za svaku vrijednost  $\Omega_0$ , pri čemu veća vrijednost  $\Omega_0$  odgovara bržim oscilacijama signala.

Posmatrajmo ponovo opšti oblik kompleksnog eksponencijalnog signala:

$$x(t) = |C||\alpha|^t \cos(\Omega_0 t + \theta) + j|C||\alpha|^t \cos\left(\Omega_0 t + \theta - \frac{\pi}{2}\right). \quad (2.60)$$

Zaključili smo da se iz opšteg oblika (2.60) za  $|\alpha|=1$  dobiju prostoperiodični kompleksni sinusni signali čiji su realni i imaginarni dijelovi prostoperiodični realni sinusni signali. Za  $|\alpha| \neq 1$  radi se o *pseudoperiodičnim kompleksnim eksponencijalnim signalima*, čiji su realni i imaginarni dijelovi *pseudoperiodični sinusni signali*. Za  $|\alpha| > 1$  anvelopa ovih signala je rastuća eksponencijalna funkcija, pa ih nazivamo rastućim pseudoperiodičnim sinusnim signalima, dok se za  $|\alpha| < 1$  radi o opadajućim pseudoperiodičnim sinusnim signalima. Opadajući pseudoperiodični sinusni signal

$x(t) = |C||\alpha|^t \cos(\Omega_0 t + \theta)$ ,  $|\alpha| < 1$ , se često naziva *prigušena sinusoida*. Kao primjer ovakvih signala možemo navesti odziv RLC kola. Oblici pseudoperiodičnih sinusnih signala za ova dva slučaja su prikazana na Slici 2.23. Crtkana linija predstavlja anvelopu oscilacija.

Kompleksni eksponencijalni signali igraju centralnu ulogu u predstavljanju fizičkih pojava. Ako je  $T_0$  osnovni period, *osnovna kružna učestanost* se definiše sa  $\Omega_0 = 2\pi/T_0$ . U analizi i obradi signala korisno je uvesti pojam harmonijski vezanih kompleksnih eksponencijalnih signala, tj. skupa periodičnih kompleksnih eksponencijalnih signala, čije su osnovne frekvencije jednake cjelobrojnom umnošku jedne pozitivne frekvencije  $\Omega_0$ :

$$x_k(t) = C_k e^{jk\Omega_0 t}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.61)$$

Elementi  $x_k(t)$  ovog skupa nazivaju se *harmonicima*. Nulti harmonik  $x_0(t) = C_0$  je konstanta, dok je za svaku drugu vrijednost  $k$  harmonik  $x_k(t)$  periodičan kompleksni eksponencijalni signal sa osnovnim periodom  $2\pi/(|k|\Omega_0)$ , te je njegova osnovna učestanost  $k\Omega_0$ .

Kako je signal koji je periodičan sa periodom  $T$  takođe periodičan i sa periodom  $mT$  za svaki pozitivan cio broj  $m$ , jasno je da svi signali  $x_k(t)$  imaju zajednički period  $2\pi/\Omega_0$ . Korišćenje termina *harmonijski* je konzistentno sa njegovim korišćenjem u muzici, gdje se odnosi na tonove koji nastaju od varijacija akustičkog pritiska na frekvencijama koje su harmonijski zavisne.

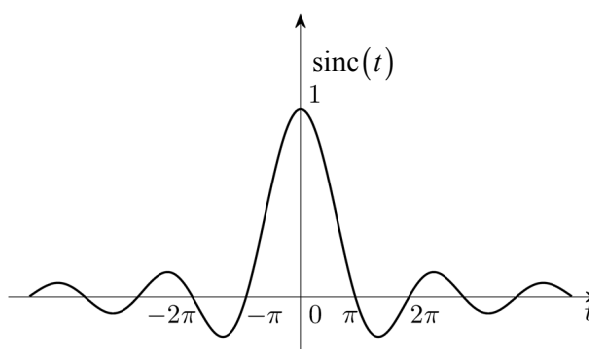
## 2.2.8 Sinc signal

Normalizovani sinc signal, prikazan na Slici 2.24, je definisan sa:

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(t)}{t}. \quad (2.62)$$

Normalizovana verzija sinc signala je data sa:

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}. \quad (2.63)$$



Slika 2.24 Grafička predstava sinc signala.

Ovaj signal ima veoma važnu ulogu u frekvencijskoj analizi signala i široku oblast primjene, posebno u obradi signala i komunikacionim sistemima.

Vrijednost sinc signala u nuli je jednaka jedan, dok se nule sinc funkcije nalaze u tačkama  $t = n\pi$ ,  $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ . Kod normalizovane sinc funkcije nule su u tačkama  $t = \pm 1, \pm 2, \dots$ . U Glavi 6, nakon uvođenja Furijeove transformacije, lako ćemo dokazati da je integral normalizovane sinc funkcije:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} dt = 1. \quad (2.64)$$

Budući da ima jediničnu površinu, sinc signal se može koristiti i za predstavu Dirakovog impulsa. Za normalizovani sinc signal vrijedi da je:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) = \delta(t). \quad (2.65)$$

Bez upuštanja u strogi matematički dokaz, ovaj granični slučaj možemo objasniti na sljedeći način. Kada  $\varepsilon \rightarrow 0$ , sve nule ove funkcije koje se nalaze u tačkama  $t = \pm\varepsilon, \pm 2\varepsilon, \dots$  teže ka nuli, pa su sve vrijednosti funkcije u graničnom slučaju jednake nuli za  $t \neq 0$ . Amplitude bočnih lukova se mogu zanemariti u odnosu na amplitudu glavnog luka, pa funkcija u nuli poprima beskonačno veliku vrijednost. Pri tome se zadržava jedinična vrijednost integrala. Dakle, zadovoljeni su svi uslovi iz definicije Dirakovog impulsa.

## 2.3 Operacije nad signalima

Skoro sve poznate operacije nad matematičkim funkcijama: transformacije nezavisne varijable u koje ubrajamo refleksiju, pomjeranje (translaciju) i skaliranje; osnovne matematičke operacije: sabiranje, oduzimanje, množenje, zatim diferenciranje i integraljenje, ima smisla primjenjivati i na signale. Osim klasičnog definiše se i generalisani izvod, kako bi bilo moguće raditi izvode signala koji imaju prekide prve vrste. Ipak, najvažnija operacija pri analizi i obradi signala u vremenskom domenu je konvolucija, kojoj ćemo posvetiti posebnu pažnju. Važnu operaciju predstavlja i korelacija koju ćemo, takođe, obraditi u Glavi 4.

### 2.3.1 Transformacije nezavisne varijable

*Refleksija signala* oko neke tačke, najčešće  $t=0$ , je ilustrovana na Slici 2.25. Refleksija signala oko nule je data sa:

$$y(t) = x(-t), \quad \forall t. \quad (2.66)$$

*Translacija signala* za neki iznos  $t_0$  odgovara pomaku signala po vremenskoj osi za isti iznos:

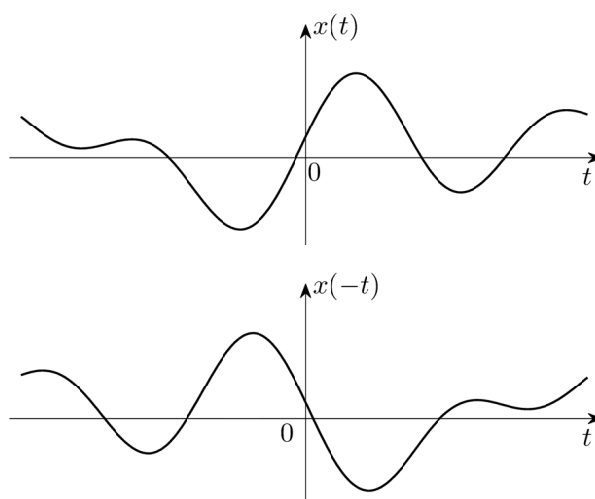
$$y(t) = x(t - t_0), \quad \forall t. \quad (2.67)$$

Signal  $x(t - t_0)$  je vremenski pomjerena verzija signala  $x(t)$ , kao na Slici 2.26.

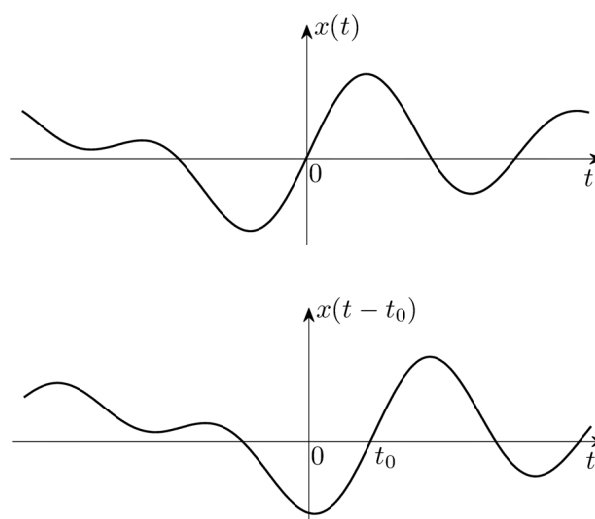
*Skaliranje signala* se dobije linearnom promjenom skale nezavisne varijable:

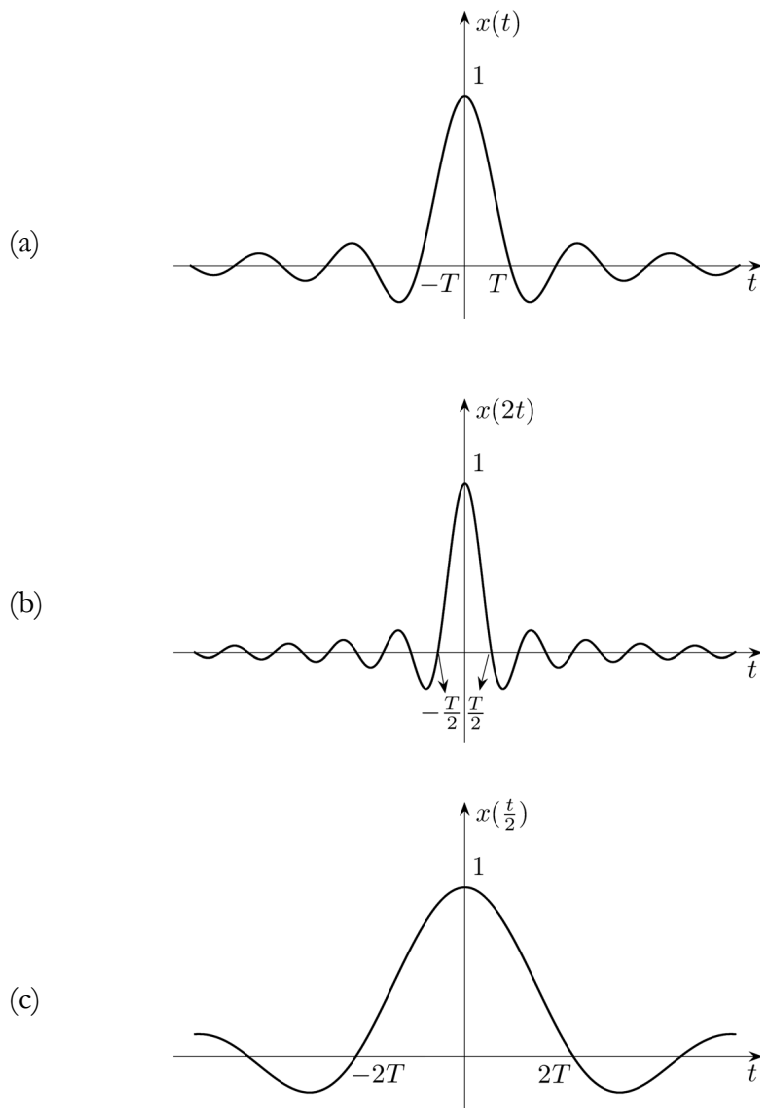
$$y(t) = x(at), \quad \forall t, \quad a \in \mathbb{R}. \quad (2.68)$$

Za  $a > 1$  signal je sužen, dok za  $a < 1$  dolazi do proširivanja signala, kao na Slici 2.27.



Slika 2.25 Refleksija signala.

Slika 2.26 Translacija signala ( $t_0 > 0$ ).



Slika 2.27 Skaliranje signala: (a) originalni signal; (b) signal skaliran sa faktorom  $a=2$  i (c) signal skaliran sa faktorom  $a = \frac{1}{2}$ .

### 2.3.2 Osnovne matematičke operacije nad signalima

Sabiranje i oduzimanje signala  $x_1(t)$  i  $x_2(t)$  se definišu sa:

$$y(t) = x_1(t) \pm x_2(t), \quad \forall t, \quad (2.69)$$

dok je množenje signala dato sa:

$$y(t) = x_1(t) \cdot x_2(t), \quad \forall t. \quad (2.70)$$

### 2.3.3 Izvod i integral signala

Jednako kao za matematičke funkcije, definišu se *izvod signala*:

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}, \quad \forall t \quad (2.71)$$

i *integral signala*:

$$y(t) = \int x(t) dt, \quad \forall t. \quad (2.72)$$

Pri određivanju izvoda pretpostavlja se da signal nema diskontinuiteta. Uvođenjem Dirakovog impulsa i na njemu zasnovanoj definiciji generalisanog izvoda omogućeno je diferenciranje i onih signala koji imaju prekide prve vrste. Geometrijski gledano, prvi izvod je jednak nagibu tangente povučene na signal u tački diferenciranja. Pošto u tačkama diskontinuiteta signal ima okomit skok, nagib tangente, pa time i prvi izvod je beskonačno velik.

Signal  $x(t)$  koji ima prekid u tački  $t=t_0$  možemo zapisati kao razliku kontinualnog signala definisanog sa:

$$x_1(t) = \begin{cases} x(t) & t > t_0 \\ x(t_{0+}) & t = t_0 \\ x(t) + [x(t_{0+}) - x(t_{0-})] & t < t_0 \end{cases} \quad (2.73)$$

i reflektovanog i pomjerenog jediničnog odskočnog signala  $u(-t+t_0)$ , na sljedeći način:

$$x(t) = x_1(t) - [x(t_{0+}) - x(t_{0-})]u(-t+t_0). \quad (2.74)$$

Ilustracija ovakvog zapisa signala sa prekidom prikazana je na Slici 2.28.

Kako je:

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \Rightarrow \frac{du(-t+t_0)}{dt} = -\delta(-t+t_0) = -\delta(t-t_0), \quad (2.75)$$

generalisani izvod signala  $x(t)$  definišemo sa:

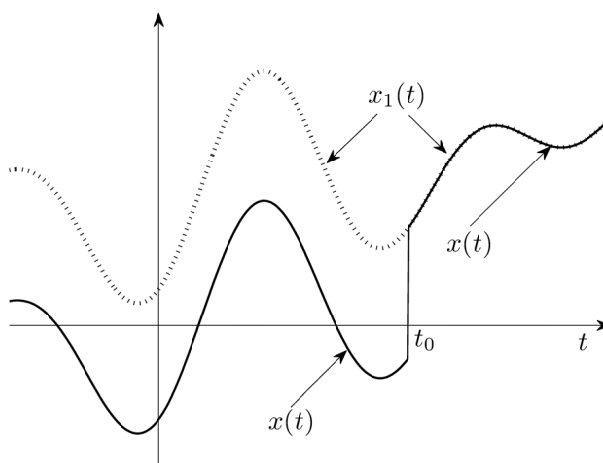
$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt}, & t \neq t_0 \\ [x(t_{0+}) - x(t_{0-})]\delta(t-t_0), & t = t_0. \end{cases} \quad (2.76)$$

Pri tome smo koristili činjenicu da je  $\frac{dx_1(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}$  za  $t \neq t_0$ . Generalisani izvod posmatranog signala sa prekidom je prikazan na Slici 2.29.

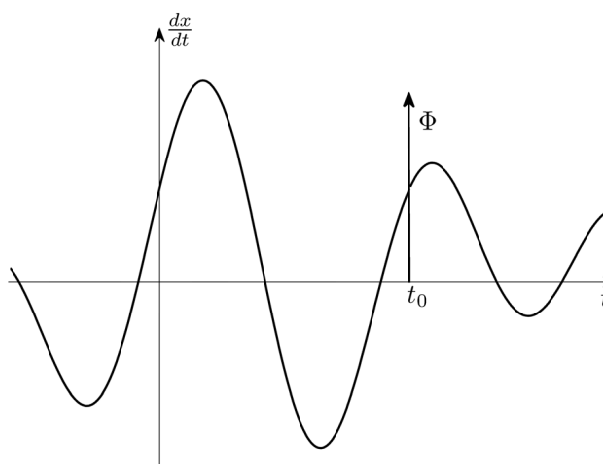
Ako signal ima diskontinuitet u više tačaka  $t = t_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ , generalisani izvod se definiše sa:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{cases} \frac{dx(t)}{dt}, & t \neq t_k, k = 0, 1, 2, \dots, n \\ \sum_{k=1}^n [x(t_{k+}) - x(t_{k-})]\delta(t-t_k), & t = t_k, k = 0, 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (2.77)$$





Slika 2.28 Signal  $x(t)$  sa prekidom u tački  $t = t_0$  (puna linija) i njemu pridruženi signal bez prekida  $x_1(t)$  (isprekidana linija).



Slika 2.29 Generalisani izvod signala  $x(t)$  koji ima prekid u tački  $t = t_0$ ,  $\Phi = x(t_{0+}) - x(t_{0-})$ .